LE TEMPS DE LA DYNAMIQUE ET LA DYNAMIQUE DU TEMPS

THIERRY PAUL

Résumé. Le temps apparait habituellement dans la résolution des équations différentielles comme un simple paramètre, le curseur d'une dynamique habitant dans un espace absolu et immuable. L'équation (forme fugue) génèrerait donc, pour toujours et à partir d'une donnée initiale (thème) un flot, tel une fugue qui ne s ?arrêterait jamais. Les mathématiques récentes on fait voler en éclat ce côté par trop passif du temps et nous ont montré que le temps pouvait, au cours du temps, changer de statut et nécessiter une ouverture de la notion d'espace à de nouveaux paradigmes. Nous présentons plusieurs exemples d'une telle dynamique du temps et tenterons d'exhiber quelques résonances avec le temps musical.

Table des matières

Avertissemnt

Les lignes qui suivent voudraient avant tout convaincre le lecteur non mathématicien de certaines analogies entre mathématiques et musique, et non d'une quelconque homologie.

Mode d'emploi

Cet article contient des formules, que les mathématiciens ou plus généralement les scientifiques sauront lire et/ou comprendre. Mais cet article s'adresse principalement aux autres, les formules revendiquant de ne jouer qu'un rôle illustratif ou d'exemple.

Le lecteur devra donc avoir un peu de patience, face à des expressions inaudibles.

Il devra simplement penser que bien souvent se trouve là le lot du mathématicien en action, pour qui il a été fondamental d'apprendre à ne pas comprendre.

1. Introduction

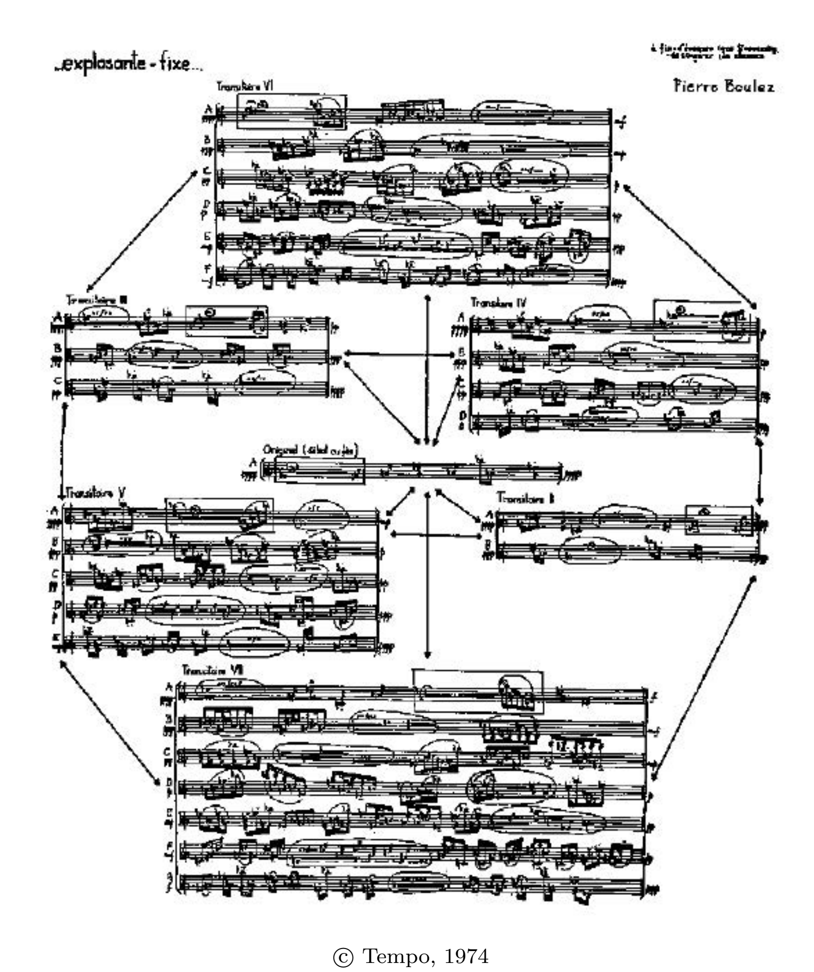
La formulation moderne des équations de l'électromagnétisme, les célèbres équations de Maxwell, est la suivante :

$$dF = 0.$$

Voilà bien une équation simple d'apparence. Deux lettres et deux signes mathématiques. Un seul signe même si l'on songe que, au fond, 0 et $= 0$ ne font qu'un.

Nous voyons donc un “second membre” nul, comme souvent il se doit, et un premier membre convoquant une inconnue F, le tenseur électromagnétique, et une lettre qui est en fait un signe mathématique d, celui de la différentiation.

Comment pourrait-on rapprocher cela d'une partition, longue suite de pages remplies de notes ? Voyons donc une partition. Celle-ci



© Tempo, 1974

Bien sûr il faut penser que cette page de musique est faite pour être "réalisée", comme elle le fût d'ailleurs. Donnant lieu à un chef d'œuvre de quelques 45 minutes. Mais on se plait à imaginer que les baroqueux du XXIIième siècle se plairont un jour à revendiquer cette page de musique comme seule admissible, et encore à condition de la jouer sur électroacoustique d'époque.

Cette partition doit donc être réalisée ; tout comme, justement doit être réalisée notre équation de Maxwell en les équations fondamentales qui régissent les lois de l'électricité et du magnétisme.

Car il s'agit dans

$$dF = 0$$
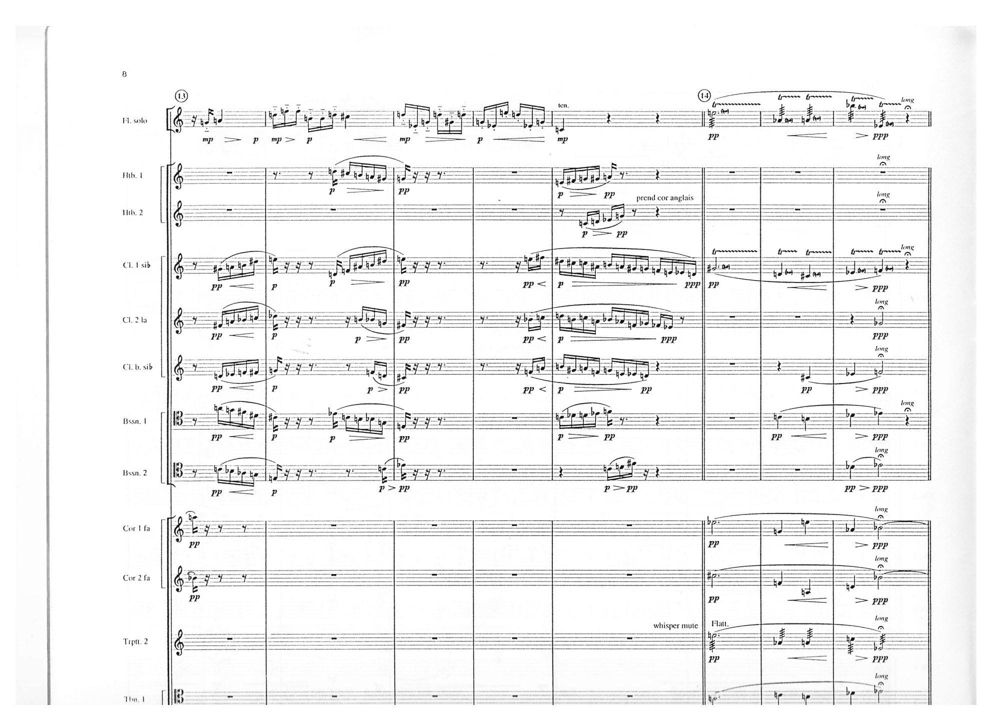
de l'expression la plus ramassée des équations de l'électromagnétisme de Maxwell........qui se développent comme suit :

$$\begin{cases} \mathrm{div}\vec{D} & = & \rho \\ \mathrm{div}\vec{B} & = & 0 \\ \mathrm{rot}\vec{E} & = & 0 \\ \mathrm{rot}\vec{H} & = & \vec{j} + \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial^2 t} \end{cases}$$

qu'il faut encore " coupler" (entre autres) à

$$\begin{cases} \oint \vec{D} dS & = & \int \rho dx \\ \oint \vec{B} dS & = & 0 \end{cases}$$

Et pour ...explosante-fixe... la partition se réalise, se développe, ainsi (localement) :



Bien sûr ces deux exemples sont extrêmes mais ils révèlent un premier temps produit, commun à l'équation et à la partition : le temps de la réalisation. Réalisation de la signification des symboles par exemple pour l'équation, et réalisation de la construction de l'interprétation, via parfois l'analyse, pour la partition. Ce temps est produit avant l'interprétation, tout comme il est produit avant la résolution de l'équation.

De ce temps il n'en sera pas question ici, puisque nous allons aller pour ainsi dire plus loin et entrevoir le temps de la solution de l'équation, de l'interprétation in vivo de la partition elles-mêmes. Mais il me semble qu'il y a là, dans ce temps de la réalisation, un exemple de temps produit qu'il serait intéressant d'étudier, en particulier au vu des rapports entre mathématiques et musique.

Nous allons donc, dans le texte qui suit, essayer de présenter quelques équations différentielles, parmi les plus simples qui

soient, et tenter de montrer comment va émerger un temps de l'équation, et un temps de la solution, beaucoup plus riche et, nous le verrons, plus facétieux. Deux temps, tout comme en musique le temps de la partition et le temps de l'interprétation, différents eux aussi.

2. Le temps géométrisé

Notre point de départ sera donc post-réalisation, c'est-à-dire que nous allons considérer que notre équation, nos équations, sont prêtes à être résolues : point de mystère de compréhension des symboles. Tout comme une partition suffisamment analysée pour que chaque partie soit jouable, en particulier sans ambiguïté de notation.

L'équation "préparée" vit dans un espace et un temps bien définis, et en général géométrisés, comme nous l'a appris la science moderne - tout comme la partition vit avant d'être jouée dans un espace de notations connues de tous les interprètes. Et c'est bien, probablement, l'obtention de ce consensus qui a de même valu à la géométrie ce rôle universel que l'on a bien voulu voir dans les sciences modernes (jusqu'à l'avènement de la mécanique quantique).

Ce temps géométrisé, exact pendant de l'espace (par exemple pour les équations de la dynamique) a bien sûr la vertu de poser clairement les équations, les problèmes. Mais nous allons essayer de montrer sur quelques cas simples comment il reflète mal la temporalité des solutions des équations, temporalité bien plus complexe, plus sensuelle en quelque sorte que celle de l'équation, et qu'une identification entre ces deux temps réduirait à néant. Exactement comme la lecture d'une partition "classique" par un ordinateur, pourtant parfaitement apte à y comprendre toutes les notations, détruit la musique qu'elle contient.

3. Le temps du problème et le temps de la solution

Une équation est donc posée dans, plutôt sur, un espace-temps géométrisé, absolu en général. Le vocabulaire nous le dit déjà, qui "pose" une équation, comme on pose un problème sur la table. Peut-être doit-on y voir là un optimisme positiviste, héritée d'une philosophie toute laplacienne, mais il semble que l'on imagine difficilement de concevoir une équation dans un espace-temps où le temps serait, par exemple, contraint. C'est pourtant le cas de la dynamique quantique, nous y reviendrons.

L'équation a longue vie potentielle, donc. Mais la solution, qu'elle génère pourtant, va avoir une tout autre vie et je vais essayer de montrer comment la solution d'un problème, d'une équation, va développer son propre temps qui pourra ne plus rien avoir à voir avec le temps géométrisé dans lequel, sur lequel l'équation était posée.

Ce surgissement d'un nouveau temps lors du surgissement de la solution, l'équation en est-elle responsable ? Oui bien sûr, mais, pour reprendre une formule famause, elle n'en est pas coupable. La preuve en est que des solutions différentes, associées à des conditions initiales différentes, vont produire des temps de qualités fort différentes.

Produire. Le mot est lâché, qui va nous proposer un lien avec le surgissement hors d'une œuvre musicale que représente une de ses interprétations.

L'analogie nous semble en effet défendable : l'interprétation d'une partition serait en bien des points semblable à l'émergence de la solution d'une équation. Ou plutôt l'interprétation serait une solution à/de la partition. Laissons pour le moment de savoir si un tel rapprochement est justifié, ou s'il se justifie au cours de cet article, pour ne retenir que cette dichotomie entre deux temps que pourtant tout voulait identifier : le temps du problème et le temps de la solution.

4. Qu'est-ce qu'une équation différentielle ?

Équation différentielle. Le mot fait peur : équation, et différentielle, en plus. Il fait peur aussi face à notre culture qui a du mal à se libérer encore une fois d'un ersatz du paradigme laplacien : si les phénomènes sont complexes, les lois les régissant doivent l'être. Plutôt elles se doivent de l'être faute de quoi elles ne seraient pas prises au sérieux.

Vers la fin du XIXième siècle un miracle pourtant s'est produit : une équation simple peut avoir des solutions complexes et surtout une grande variété de solutions. C'est en quelque sorte une revanche (de la nature peut-être) sur la dynamique scientifique de l'ère classique qui avait réussi ce pari incroyable de modéliser les phénomènes fondamentaux de la science classique, pourtant si complexes et diversifiés, par des équations *simples et universelles*.

Regardons donc simplement ce qu'est une équation différentielle.

Et revenons à $dF = 0$ ou plutôt à celle-ci, à peine plus générale,

$$\frac{dF}{dt} = G$$

Peu importe ici la signification des quantités F et G. Seuls comptent t, le temps, et d le grand ordonnateur de la différentiation.

$$\frac{dF}{dt} = G$$

est une équation qui, en toute rigueur, signifie :

$$F(t + dt) = F(t) + dt \times G, \quad \text{pour } dt \text{ infiniment court.}$$

mais qui, en toute humanité, signifie plutôt :

"si je connais F *maintenant*,

l'équation me dit

ce qu'est F *juste après*"

mais qui donc signifie aussi :

"si je connais F *juste après* ,
l'équation me dit
ce qu'est F *juste après juste après*"

qui signifie encore :

"si je connais F *juste après juste après* ,
l'équation me dit
ce qu'est F *juste après juste après juste après*"

et qui signifie encore :

"si je connais F *juste après juste après juste après*,
l'équation me dit
ce qu'est F *juste après juste après juste après juste après*"

On voit apparaître le mécanisme : l'équation permet de passer du futur immédiat au futur lointain. Juste par itération. En principe.

Mais en fait, est-ce vraiment juste par itération ? Quelle est la signification de ce *dt infiniment court* ? C'est ce que nous allons voir maintenant.

5. L'équation produite dans le temps et le temps produit par la solution

Le temps de l'équation est le temps des *justes après*, un banal temps itéré, celui de la trotteuse de notre montre qui saute toutes les secondes. (Est-il subversif de se demander si on ne peut y voir le temps d'une certaine musique électronique ou celui de certains minimalistes ?)

Que le lecteur non mathématicien, et non scientifique, ne s'effraie pas. Il est facile de comprendre ce passage à la la limite

$$\frac{dF(t)}{dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{F(t+\delta t) - F(t)}{\delta t}$$

dans des cas très simple.

La fonction constante $F(t) = 1 := t^0$ fait école : on obtient bien sûr $\frac{dF(t)}{dt} = 0$ puisque $F(t+\delta t) - F(t) = 0$. Prenons maintenant la fonction $F(t) = t$. Alors $F(t+\delta t) = t+\delta t$ et donc $\frac{F(t+\delta t)-F(t)}{\delta t} = 1$. Mais si $F(t) = t^2 := t \times t$ alors $F(t+\delta t) = t^2 + 2t\delta t + \delta t^2$ et donc $\frac{F(t+\delta t)-F(t)}{\delta t} = 2t + \delta t$ d'où, à la limite $\delta t = 0$, $\frac{dF(t)}{dt} = 2t$. Le lecteur se convaincra alors que si $F(t) = t^k := \underbrace{t \times t \cdots \times t}_{k \text{ fois}}$, alors $\frac{dF(t)}{dt} = kt^{k-1}$ (il se rappellera $(a+b)^k = \sum_{j=1}^{k} \frac{j1}{k!(k-j)!} a^j b^{k-j}$ où $j! = 1.2.3.\ldots.j$), en accord avec les cas $k = 0, 1, 2$ vus plus haut. Il admettra aussi aisément que la formule est même vraie pour k non entier.

À partir de là intervient un élément essentiel : en fait la solution se construit non par itération comme entrevu dans la section 4, mais par résolution : par itération *plus* passage à la limite dans le sens que nous venons de voir. Et ces deux limites cohabitent mal ensemble, leur effectivité conjointe dépend de l'ordre dans lequel on les effectue, en quelque sorte. Ce que les informaticiens connaissent bien, d'ailleurs.

Le temps de la solution n'est donc pas celui de l'équation

$$\lim_{\text{“juste après”}\to 0} \left(\sum_{0}^{\infty} \text{“juste après”} \right)$$

ni celui formellement identiquement nul

$$\sum_{0}^{\infty} \left(\lim_{\text{“juste après”}\to 0} \text{“juste après”} \right)$$

mais est bien

$$\left(\sum_{0}^{\infty} \lim_{\text{“juste après”}\to 0} \right) \text{“juste après”}$$

qui prend tout son sens dans cette intrication "$\sum \otimes \lim$" [1].

C'est ce passage à la limite qui fait "décoller" le temps produit par la solution : c'est le génie du calcul infinitésimal, génie à la fois dans son sens intellectuel et dans son sens diabolique, maléfique peut-être.

Un passage a l'infini, tout comme c'est un (autre) passage à l'infini, qui résout le paradoxe de Xénon.

6. Des solutions et les temps qu'elles produisent

Systèmes mélangeant, chaotiques, flèche du temps, irréversibilité, tels sont les noms de concepts souvent avancés dans les discussions présentant les surprises des systèmes dynamiques. De tels systèmes sont par essence complexes et leur "explication" au non-spécialistes passent trop souvent par d'exquises figures, images dont la beauté intrinsèque cache souvent la nature des choses qu'elles représentent. Nous allons donc considérer des équations plus simples dont les solutions nous montreront diverses surprises directement conceptuelles.

6.1. **L'avion supersonique et le temps fini : l'accord final.** Le fameux "bang" de l'avion supersonique passant au dessus de notre tête est un exemple de singularité de la solution d'une équation aux dérivées partielles. Ce bang ressemble parfaitement au bruit produit par l'explosion d'un bâton de dynamite, et pourtant se distingue de ce dernier par le fait que l'avion ... n'explose pas. Ce n'est pas l'avion qui explose, mais bien la solution de l'équation sonore issue de ce dernier. Voyons cela de plus près sur l'exemple simple de l'équation qui suit, dite de Burger.

1. Pour les lecteurs qui voudraient aller un peu plus loin dans la compréhension de cette dissymétrie entre $\sum \lim$ e t$\lim \sum$, songer que l'indication $\sum_0^\infty$ est elle-même une limite $\sum_0^\infty := \lim_{N\to\infty} \sum_0^N$ par définition. Il ya donc bien deux limites dans $\sum \lim$ ou $\lim \sum$, qui donnent lieu à des résultats différents selon comment elles sont prises.

L'équation est la suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,x)=\rho(t,x)\frac{\partial}{\partial x}\rho(t,x)$$

Il y a deux variables, et pour cette raison on note ∂ à la place de d, mais l'idée est la même, exactement la même que dans la section 5 : on applique le même argument à t, puis à x.

ρ est une *fonction* de deux variables, c'est-à-dire que $\rho(t,x)$ est un nombre, et ρ représente le processus qui associe ce nombre aux deux valeurs des *variables* t et x, que l'on note :

$$(t,x)\to\rho(t,x).$$

Si l'on fixe la valeur du temps t, alors $\rho(t,x)$ est une fonction de x seulement, et l'on peut tracer son graphe : les points du plan dont l'abscisse est x et l'ordonnée $\rho(t,x)$ (ne pas oublier que t est fixé). On obtient ainsi quelque chose de bien semblable à une ligne mélodique dans une partition. Cette analogie nous sera utile plus bas.

Rappelons qu'une équation telle que celle que nous considérons contient deux fois le symbole ∂, donc deux "justes" : un "juste après" (∂t) mais aussi un "juste à côté" (∂x). Mais le lecteur se convaincra aisément que la construction présentée en section 5 marche pour les deux "justes".

De plus, si l'équation était :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,x)=\frac{\partial}{\partial x}\rho(t,x)$$

ces deux "justes" seraient exprimés dans l'équation de la même façon, ils auraient un rôle équivalent. Cette symétrie $x\leftrightarrow t$ donne facilement que la solution est en fait une fonction de la quantité $t+x$ (le lecteur fera aisément le calcul que tout fonction de la forme $\rho(t,x)=u(t+x)$ est solution de l'équation). On voit

donc que cela correspond à une propagation à vitesse constante égale à 1 : on a une identification temps-espace.

Si l'on avait pris l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,x) = \lambda\frac{\partial}{\partial x}\rho(t,x)$$

la solution serait fonction de $\lambda t + x$, et la fonction serait simplement "translatée" à la vitesse λ : translater une fonction à vitesse constante consiste à prendre son graphe et déplacer chaque point du graphe par la même quantité : $1 \times t$ dans le premier cas, $\lambda \times t$ dans le second. À quoi cela correspond-il ? Tout simplement à "pousser" chaque point de la courbe $\{(x, \rho(t,x)\}$, *graphe* de la fonction $x \to \rho(t,x)$ horizontalement à la vitesse λ. Résoudre une équation de cetype est aussi simple que cela.

Si maintenant λ dépend de x

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,x) = \lambda(x)\frac{\partial}{\partial x}\rho(t,x),$$

et bien la solution sera translatée tout simplement par une vitesse différente en chaque point, ce qui signifie que l'on devra déplacer chaque point du graphe au dessus de x à la vitesse $\lambda(x)$.

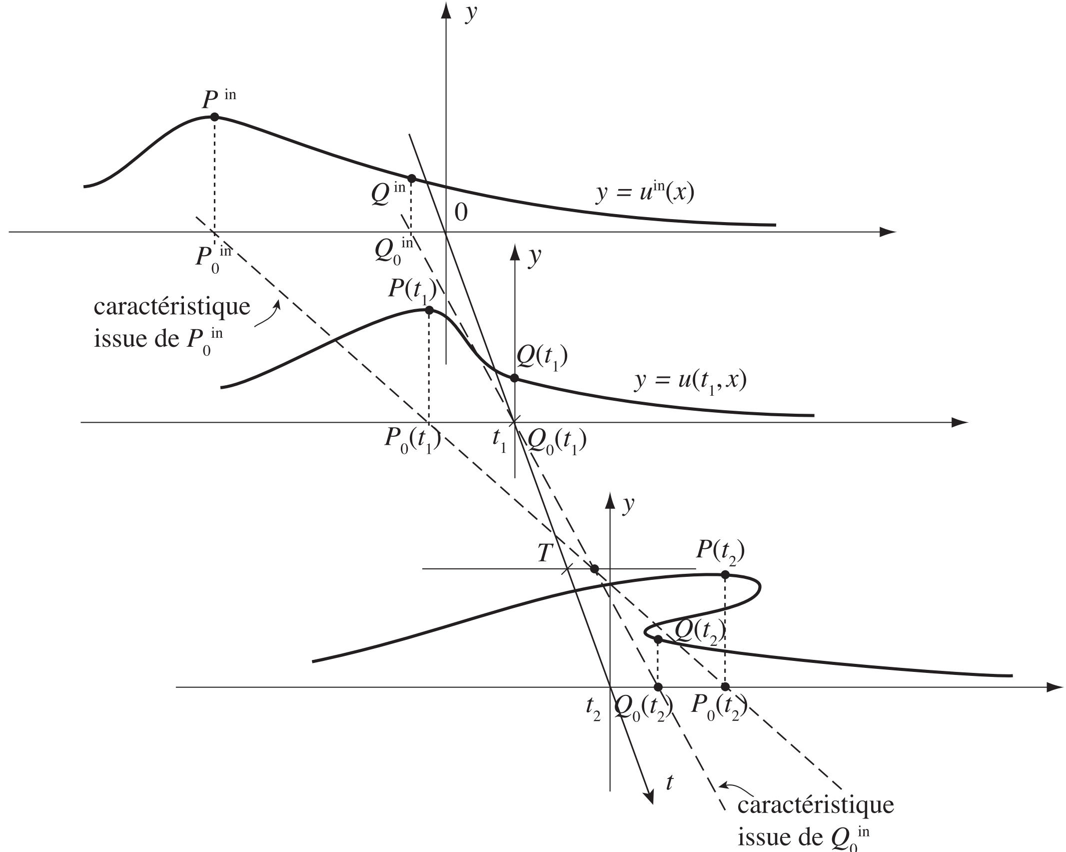
L'équation qui nous préoccupe,

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,x) = \rho(t,x)\frac{\partial}{\partial x}\rho(t,x)$$

est a peine plus compliquée. Cette fois la vitesse de propagation dépend non seulement de x mais aussi du temps. Et en plus elle est égale à la solution même : chaque point du graphe doit être translaté à une vitesse qui n'est autre que ... la valeur de la fonction au point x, justement.

L'équation est a peine plus compliquée, mais la solution, elle, va l'être, comme le montre le raisonnement suivant, accessible à tous.

L'évolution de la courbe est donnée en faisant en sorte que le point $(x, \rho(t,x))$ bouge horizontalement à la vitesse $\rho(t,x)$: les points les plus hauts bougent donc plus vite que les points plus bas, et il continue toujours à en être ainsi puisque les points du graphe se déplacent horizontalement ce qui implique que "les plus hauts restent les plus hauts". Que le lecteur dessine lui-même, le dessin lui montrera le scénario suivant se mettre en œuvre : une bosse, telle une vague, commence à se déplacer gentiment, se déformant légèrement au fil du temps, mais très vite les points plus haut veulent passer devant les points plus bas puisqu'ils sont plus rapides. Tel une vague, justement, lorsque commence à se former un rouleau.



Ici, dans cette figure, la “‘flèche du temps” est transverse à la feuille de papier, et les points issus de P^{in} et Q^{in}, s’ils restent bien à la même hauteur, se déplacent chacun à la vitesse constante P^{in} et Q^{in} respectivement, ce qui n’empêche pas le pli de se former.

Comment ne pas penser à :



© Katsushika Hokusai, *La Grande Vague de Kanagawa*, 1831

Rien de bien gênant avec la vague qui roule.....sauf qu’alors elle n’est plus le graphe d’une fonction. C’est ce qui s’ést passé pour la troisième courbe de la figure : la “solution” imaginée, à l’instant t_2 n’est plus le graphe d’une fonction, donc rate la qualité première que doit avoir la solution (classique) d’une équation, être une fonction. Il y a eu choc, bang.

Si l'on veut comprendre en quoi il est gênant que la courbe ne soit plus le graphe d'une fonction, il suffira d'imaginer ce graphe comme une ligne mélodique jouée à la clarinette. Que doit jouer le(a) clarinettiste lorsqu'il se trouve confronté à la vague d'Hokusai. Que doit-elle(il) jouer après avoir joué les deux premières courbes de la figure précédente et se trouve confronté à la troisième ? On ne peut jouer la troisième courbe comme les deux précédents, la règle doit changer, on doit passer dans un nouveau paradigme musical, comme nous le verrons plus bas.

Le moment où certains points veulent passer devant d'autres, où la vague se casse, est la fin de quelque chose, rien après n'est plus comme avant : la solution a vécu, elle n'existe plus comme solution de l'équation. Mais elle existe cependant encore : elle doit être *interprétée.*

Résumons et musicalisons un peu :

- le "bang" supersonique vient de l'équation (l'avion)
mais l'avion continue à voler
différence avec la dynamite
- le choc crée une fin pour la solution
la fin de quelque chose dans *son* temps
pas la fin du monde
- tout comme un accord d'ut majeur
sonne la fin de l'exécution
pas la fin de l'œuvre (partition)

6.2. **L'œuf sur la tête I et le chaos : le geste de l'interprétation.** Qui n'a pas joué enfant à ce jeu qui consiste à garder le plus longtemps possible un œuf cru sur sa tête ? On sait bien que, tôt ou tard, l'œuf tombe, bien que tout le monde reconnait que si aucun mouvement n'est effectué, rigoureusement,

l'œuf doit rester immobile. On sait aussi que le déplacement de la tête responsable de la chute de l'œuf peut être très petit, qu'au fond l'impulsion, la vitesse est plus importante que le déplacement réel.

Ce geste qui fait que l'œuf tombe d'un côté ou de l'autre, ce geste appartient à la solution elle-même. Différentes solutions, qui partiront de conditions initiales de vitesse différentes ont des conséquences fort différentes, mais ne font qu'interpréter "classiquement" l'équation. C'est donc un geste de l'interprétation et non de l'interprète tel qu'il va agir dans la section suivante.

Résumons à nouveau :

il suffit d'un *mouvement* de la tête, non d'un déplacement

d'un mouvement aussi petit que l'on veut, involontaire même, indécelable en effet

on a à la fois du déterminisme et de l'imprédictibilité

mais il FAUT un petit mouvement, une intervention, un *geste.*

En fait l'équation produit une seule solution pour chaque "condition initiale",c'est-à-dire pour chaque petite impulsion du mouvement de la tête. C'est la solution qui décide de son temps-espace, tout comme l'interprétation décide de l'exécution d'une œuvre musicale : une interprétation baroque et une interprétation "années 50" sont deux conditions initiales qui génèrent deux "solutions" de l'œuvre.

6.3. **L'œuf sur la tête II et le temps multiple : l'œuvre ouverte.** Considérons maintenant une situation faisant preuve d'indéterminisme.

Considérons l'équation

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -(1+\theta)(x(t))^\theta$$

avec $0 < \theta < 1$.

On trouve immédiatement deux solutions partant de $x(0) = 0$:

$$x_+(t) = +c_0 t^\nu \text{ ev } x_-(t) = -c_0 t^\nu$$

où $\nu = \frac{2}{1-\theta}$ et $c_0 = \left(\frac{(1-\theta)^2}{2}\right)^{1-\theta}$. Le lecteur non mathématicien et ne connaissant que la notion de dérivée d'une "puissance" ($\frac{d}{dt}t^\theta = \theta t^{\theta-1}$) telle qu'elle a été présentée dans la section 5 est invité à vérifier ces dires, grâce à la règle : $\frac{d^2}{dt^2}x = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}x\right)$.

Nous avons là une situation nouvelle : une seule équation fournit deux solutions, aussi légitimes l'une que l'autre. Seulement deux solutions ? Non car une troisième existe encore, celle où rien ne se passe, où, identiquement comme l'on dit en mathématique, $x(t) = 0$, pour tout valeur de t.

Trois solutions donc ?

En fait on a beaucoup plus de solutions : puisque "$x(t) = 0$ pour tout valeur de t" est une solution de la dynamique, il suffit de décider du moment du départ où $x(t) \neq 0$, que l'on peut choisir à n'importe quel instant. On peut donc construire une solution en restant immobile à l'origine jusqu'à n'importe quel temps t_0, puis commencer à bouger le long d'une des trajectoires x_+ ou x_- définies plus haut. Cette nouvelle solution, quel que soit l'instant de départ t_0, est encore solution de l'équation.

On voit là la différence avec la situation de la section précédente où différentes solutions correspondaient à différentes conditions initiales (à différentes impulsions données par la tête). Ici point de tête qui bouge, il y a plusieurs solutions (et même une infinité non dénombrable) de l'équation, un point c'est tout. Et

l'on voit que le temps produit par l'équation, par exemple le temps de "départ" où la solution va commencer a bouger n'est pas déterminé, c'est un temps que l'on doit choisir.

Car face à cet indéterminisme, en effet, on doit choisir. On ? Qui ?

Non plus la solution *elle-même* puisque qu'à présent elle est multiple, elle englobe toutes les décisions appréhendables, tout le jeu des possibles.

La bonne solution doit être et est choisie par un élément extérieur (physique, idéologie, applications) : en fait, c'est le mathématicien qui choisit, au moyen de divers critères (et qui dira a posteriori que l'on cherchait une solution de tel ou tel type).

Musicalisons : ce n'est plus l'interprétation qui choisit dans le jeu des possibles, mais bien l'interprète à lui-seul.

Nous y voilà :
l'équation, comme l'œuvre ouverte,
produit la production du temps.

C'est déjà une espèce de dramaturgie.

C'est d'ailleurs en termes "dramatiques" que le mathématicien, en général à la recherche d'unicité de solutions, découvre cette multiplicité perçue comme ubiquité malvenue.

Mais cela suggère aussi la question suivante :
Peut-on faire rentrer ce geste extérieur dans la solution, dans l'équation ?

Qui est un pendant de sa version "musique"

Peut-on faire rentrer ce geste de l'interprète dans l'interprétation, dans l'œuvre ? La réponse viendra à la prochaine section.

Intermezzo

Drame et mathématiques n'ont pas la réputation de faire bon ménage. Ces dernières étant considérées souvent comme échappant au sensible. Et pourtant, comment ne pas voir de dramaturgie dans le "faire" des mathématiques, dans les espoirs les désillusions contenus dans le parcours de l'élaboration d'un résultat ? Mais aussi comment ne pas dramatiser les résultats eux-mêmes ? Comment ne pas voir dans le temps que met une courbe à devenir cercle lorsqu'elle cherche à optimiser sa courbure une évolution faisant référence à une fin, à une certaine forme de mort esthétique ? Le pli de la solution de l'équation aux dérivées pratielle vue plus haut ne dispute-t-il pas la douleur du retournement de la vague de Hokusai ?

7. De l'œuf à droite et gauche au spin : l'aléatoire intrinsèque quantique et l'œuvre ouverte dramatisée

Nous avons terminé la discussion sur la multiplicité des solutions d'une équation par une question, celle de savoir si le geste du choix d'une solution pouvait être inclus dans l'équation elle-même, ou en tous cas dans la dynamique qu'elle représente.

La mécanique quantique a réalisé cela, avec les succès que l'on connait et avec les scandales que l'on sait. Le premier et plus important succès a mon sens tient dans le miracle de la formalisation mathématique cohérente de la mécanique quantique.

La puissance et l'intention de l'œuvre ouverte (cf. Éclat) dues au hasard en temps réel pour l'interprète (par exemple créé pat le chef d'orchestre)

*est une **dramaturgie**.*

Le miracle des mathématiques cohérentes de la mécanique quantique qui met cet *aléa* dans l'équation elle-même est-elle, au fond, autre-chose ?

8. Vraisemblance, aléatoire, quantique, Manovich and all that

Nous n'avons pas parlé dans ce texte des aspects probabilistes de la mécanique quantique. Cela tout d'abord pour éviter toute confusion avec une vision par trop statistique de la théorie quantique. C'est bien pourtant cet aspect probabiliste qui donne parfois l'idée d'une vraisemblance, classique en quelque sorte, du résultat de la dynamique quantique à l'échelle macroscopique.

Une propriété fondamentale du probable quantique est le jeu restreint des possibles, vraie définition de l'aléatoire tel qu'il nous semble être partagé entre le monde quantique et le monde merveilleux des œuvres ouvertes de la musique contemporaine. Et si l'on se pose une des questions fondamentales du formalisme quantique, celle de savoir quel peut être le sens profond d'un événement individuel ayant une certaine probabilité, il nous semble utile de la confronter au pendant musical d'*une* interprétation, par *un* l'interprète, d'une œuvre ouverte. Où l'ouverture est (censée être) refermée par le hasard.

Éclat de Pierre Boulez nous semble être une certaine forme de paradigme de cette situation.

Que se passe-t-il dans Éclat ? Chaque exécution de l'œuvre est bien une réalisation différente (en principe) à chaque fois. Tout comme est différente à chaque fois le point lumineux qui va apparaitre lorsque (l'onde de) l'électron va “arriver” sur l'écran.

Car il s'agit bien du même électron qui arrive à chaque fois sur l'écran, tout comme il n'y a qu'une (partition de l') œuvre nommée Éclat.

Mais le mécanique quantique associe un peu plus à ce scénario : à chaque état de l'électron est associée une (amplitude de) probabilité. Et c'est cette probabilité que la succession d'événements

"électron $\rightarrow$ un point de l'écran"

va dessiner, par compilation. Tout comme Lev Manovich dans ces juxtapositions/superpositions de couvertures de magazines.

.... Campbel, Campbel, Campbel, Campbel, Campbel ....

9. En guise de conclusion

Nous avons essayé de montrer dans ce petit texte comment une équation différentielle, pourtant posée dans un temps statique, géométrisé, absolu, pouvait donner lieu à des solutions développant leurs propres temps, et comment ces derniers pouvaient être de natures fort différentes : temps ayant une fin lors d'un choc, temps multiples pour les problèmes mal posés, temps aléatoire enfin lors de situations chaotiques ou quantiques. L'analogie avec l'interprétation d'une œuvre musicale, fermée ou ouverte, se trouve ainsi illustrer le propos mathématique, car il s'agit bien dans les deux cas d'une production de temps se révélant lors de l'interprétation/solution d'une partition/équation.

La solution d'une équation différentielle n'est pas "indicée" par le temps, elle ne subit pas le temps, elle le produit.

CNRS et CMLS École polytechnique, 91 128 Palaiseau cedex
E-mail address: paul@math.polytechnique.fr